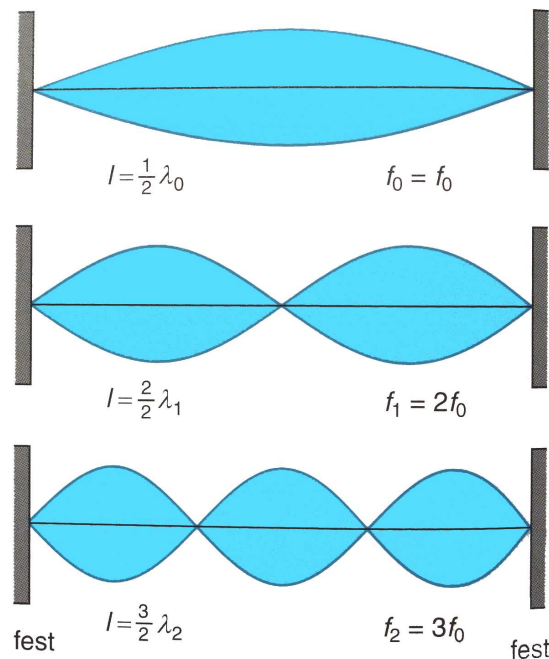


Die schwingende Saite

Theoretische und experimentelle Betrachtungen



$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}$$



Facharbeit von Vera Schnells, Stufe 12, Schuljahr 2006/2007

Beratungslehrer: Herr Thul

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Schwingungen und Wellen	
2.1 Schwingungen	5
2.2 Wellen	10
2.3 Mathematische Aspekte	
2.3.1 Differentialgleichungen	17
2.3.2 Schwingungsgleichung	19
2.3.3 Klassische Wellengleichung	24
3. Die schwingende Saite	
3.1 Herleitung der Wellengleichung anhand einer Saite	26
3.2 Eigenschwingungen	28
3.2.1 Herleitung eines Terms zur Beschreibung der stehenden Wellen	30
3.2.2 Harmonische Frequenzverhältnisse	33
3.2.3 Die Dispersionsrelation	35
3.3 Allgemeine Bewegung einer Saite	
3.3.1 Überlagerung von Schwingungen	37
3.3.2 Herleitung eines Terms zur Beschreibung der allgemeinen Bewegung einer Saite	39
4. Experiment: Die Dispersionsrelation einer Saite	42
4.1 Versuch 1	43
4.2 Versuch 2	47
4.3 Versuch 3	51
4.4 Ergebnis	56
5. Schlusswort	57
6. Literaturverzeichnis	59
7. Bildnachweis	61
8. Anhang	63
9. Selbstständigkeitserklärung	64

1. Einleitung

Das Problem der schwingenden Saite stellt in der Physik ein zentrales Motiv dar, welches aber auch von Seiten der Mathematik häufig betrachtet wird und im Alltag ein weites Anwendungsspektrum vorzuweisen hat.

Allein das physikalische Gebiet der Schwingungen und Wellen, auf dem die Erklärung der schwingenden Saite beruht, erweist sich als sehr vielseitig. So kennt jedermann zahlreiche Naturphänomene, die mittels Wellen beschrieben werden können: Es gibt Wasser-, Schall-, Licht- und Radiowellen, de Broglie-Wellen, seismische Wellen und viele andere. Jedes dieser Teilgebiete weist wieder eine große Komplexität auf und ist gegenüber den anderen Teilgebieten durch eine eigene Fachsprache usw. gekennzeichnet. Es erweist sich jedoch als relativ einfach, scheinbar nicht zusammenhängende physikalische Erscheinungen durch gemeinsame Begriffe auf der Grundlage der Wellenlehre zu beschreiben, sodass man zum Beispiel ein mathematisches Pendel mit einem LC-Kreis vergleichen kann.

Anhand der schwingenden Saite kann man grundlegende Eigenschaften von Wellen erlernen und gleichzeitig Einblick in weiterführende physikalische und mathematische Methoden bekommen, sodass dieses Motiv zu einem Verbindungsglied zwischen elementarer und weiterführender Physik wird. Folglich wird im Studium der Physik das Themengebiet meist im ersten oder zweiten Semester vermittelt.

Gleichzeitig aber erweist sich die schwingende Saite auch jenseits der Mechanik als ein recht leistungsfähiges Modell zur Beschreibung verschiedener Phänomene. Verwiesen sei hierbei auf die String-Theorie, nach welcher „jedes Elementarteilchen aus einer winzigen, vibrierenden Saite“¹ besteht.

In der Mathematik gilt das Problem der schwingenden Saite als „eines der großen und fruchtbaren Probleme der Mathematik [...], das der Entwicklung der Analysis mächtige Impulse gegeben hat“².

Als Anwendung hat die schwingende Saite vor allem in der Musik eine große Bedeutung, da die Tonerzeugung bei Saiteninstrumenten auf ihr beruht, was beispielsweise für die Instrumente Geige, Gitarre, Cello und Klavier gilt.

Die vielseitige Bedeutung in Wissenschaft und Alltag und die Tatsache, dass die Thematik der schwingenden Saite einige wesentliche Inhalte des Studiums der Physik vermittelt, brachten mich zu dem Entschluss, meine Facharbeit über dieses Thema zu verfassen.

¹ Edward Witten (Institute of Advanced Study in Princeton); zitiert nach: Grotelüsch, Frank: Swing und String; in: Kölner Stadt-Anzeiger (6./7. Januar 2007), Modernezeiten S. 7 [siehe Anhang]

² Heuser, Harro; Lehrbuch der Analysis [2]; Teubner; S. 118

Ausgangspunkt der Facharbeit ist das Themengebiet der mechanischen Schwingungen und Wellen (Kapitel 2), wodurch die Basis für die Erklärung der schwingenden Saite geliefert wird. Die nähere mathematische Betrachtung leitet zum Hauptteil der Facharbeit, der physikalisch-mathematischen Betrachtung des Themas, über. Hierbei wird zuerst anhand der schwingenden Saite die Wellengleichung hergeleitet. In den zwei folgenden Abschnitten (Kapitel 3.2 und 3.3) werden zuerst die Eigenschwingungen, daraufhin die allgemeine Bewegung mit Hilfe mathematischer Werkzeuge (vor allem der Fouriertransformation) einer Saite betrachtet.

Der anschließende experimentelle Teil der Facharbeit überprüft, inwieweit einfache Versuche mit einer schwingenden Saite eine theoretisch aufgestellte Dispersionsrelation eines einfachen Modells liefert.

Ich hoffe, dass die Leser meine Facharbeit mit Interesse lesen und ich ihnen einiges an Wissen vermitteln kann.

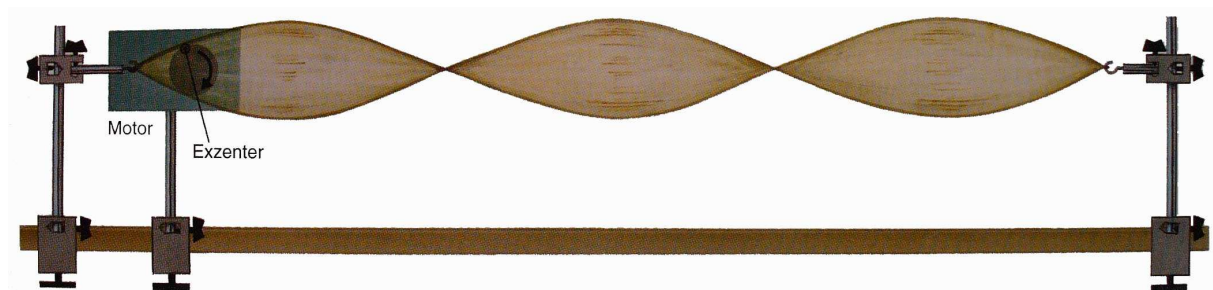


Abb.1 Stehende Wellen auf einem Gummiseil

2. Schwingungen und Wellen

2.1 Schwingungen

Vorgänge, bei denen sich ein physikalischer Zustand zeitlich periodisch verändert, werden Schwingungen genannt. Führt ein Körper also eine periodische Hin- und Herbewegung aus, so handelt es sich um eine mechanische Schwingung.

Diese Vorgänge treten auf, wenn ein stabiler Gleichgewichtszustand gestört wird und Kräfte wirksam werden, die in Richtung auf die Gleichgewichtslage wirken.

Begriffe

Im Folgenden werden einige wichtige Begriffe und Größen zur Beschreibung und mathematischen Erfassung der Schwingung eingeführt.

- Schwingungsfähige Systeme, auch Oszillatoren genannt, führen periodische Bewegungen aus, d. h. die Bewegungszustände wiederholen sich in gleichen Zeitabständen gleich oder ähnlich.

- Eine vollständige Schwingung entspricht einer Hin- und Herbewegung eines Körpers bezüglich eines Bahnpunktes, den er im gleichen Sinne durchläuft. Dabei verläuft die Bewegung des Oszillators zwischen zwei Umkehrpunkten durch die Ruhelage (siehe Skizze).

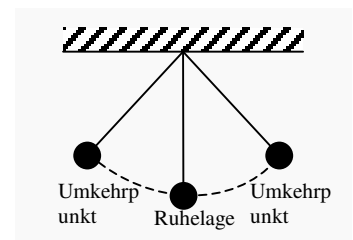


Abb. 2 Fadenpendel

- Die Schwingungsdauer oder Periodendauer T ist die zeitliche Dauer einer vollständigen Schwingung. Benötigt ein Oszillator für n Schwingungen die Zeit t, so beträgt seine

Periodendauer $T = \frac{t}{n}$; für die Einheit gilt: $[T] = 1 \text{ sec}$. (siehe Abb. 4)

- Die Schwingungszahl oder Frequenz f ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl n der Schwingungen in der Zeit t pro Zeit t und somit gleich dem Kehrwert von T: $f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$.

Die Einheit der Frequenz ist 1 Hertz: $[f] = \frac{1}{\text{sec}} = 1 \text{ Hz}$.

- Die momentane Auslenkung oder Elongation y(t) gibt den Ort an, um den sich der schwingende Körper aus der Gleichgewichtslage entfernt hat in Abhängigkeit von der Zeit. In der Ruhelage ist die Elongation gleich Null, die Auslenkungen nach der einen Seite unterscheiden sich von den Auslenkungen zur anderen Seite im Vorzeichen.

- Die Schwingungsweite oder Amplitude \hat{y} gibt den Betrag der größten Elongation an.

- Die rücktreibende Kraft oder Rückstellkraft F ist die auf den schwingenden Körper wirkende, immer zur Gleichgewichtslage gerichtete Kraft. Sie wirkt somit beim Anwachsen des Betrags der Elongation der Bewegung entgegen, bei der Abnahme unterstützt sie die Bewegung, wodurch die Geschwindigkeit des Oszillators verringert bzw. vergrößert wird. Bei dem in Abb.2 dargestellten Federpendel ist die zur Bahn des Oszillators tangentielle Komponente der Schwerkraft die Rückstellkraft. Es gilt: $[F] = 1 \text{ N}$.

Das oszillatorische Verhalten rührt stets vom Wechselspiel der Rückstellkraft und der Trägheit des schwingenden Körpers her, da die Trägheit des Körpers jeder Geschwindigkeitsänderung entgegenwirkt. So bewirkt sie beispielsweise, dass der Körper über die Ruhelage, in deren Richtung die Rückstellkraft wirkt, „hinausschießt“.

Die harmonische Schwingung

Die wichtigste Schwingung ist die harmonische Schwingung, aus welcher sich alle anderen Schwingungsformen zusammensetzen lassen. Kennzeichnend für diesen Schwingungstyp ist, dass die Rückstellkraft der Elongation proportional ist und stets zur Gleichgewichtslage gerichtet ist, es gilt also ein lineares Kraftgesetz. Wichtige Eigenschaften sind zudem, dass die Frequenz der Bewegung unabhängig von der Schwingungsamplitude ist und dass die Wirkungen mehrerer Erregungskräfte sich linear überlagern (siehe auch 3.3.1).

Beispiele für harmonische Schwingungen sind ungedämpfte Feder-, Fadenpendel, Blattfedern, etc.

Die harmonische Schwingung weist eine Verwandtschaft mit der Kreisbewegung auf, da auch sie anhand einer Sinus- (bzw. einer Kosinusfunktion) beschrieben werden kann. Dieser Zusammenhang kann dargestellt werden, indem dem auf der Kreislinie befindlichen Punkt ein Körper entspricht, der eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt. Der Wert der Projektion des Ortsvektors des Punktes auf die Ordinate nimmt entsprechend einer harmonischen Schwingung zu und ab, er entspricht folglich der Elongation des Oszillators. Die Umlaufzeit T der Kreisbewegung entspricht somit der Periodendauer T und der Radius des Kreises der Amplitude der Schwingung. Beide Bewegungen können folglich durch die gleiche Sinusfunktion beschrieben werden.

Abb.3 gibt den vorgestellten Fall wider:

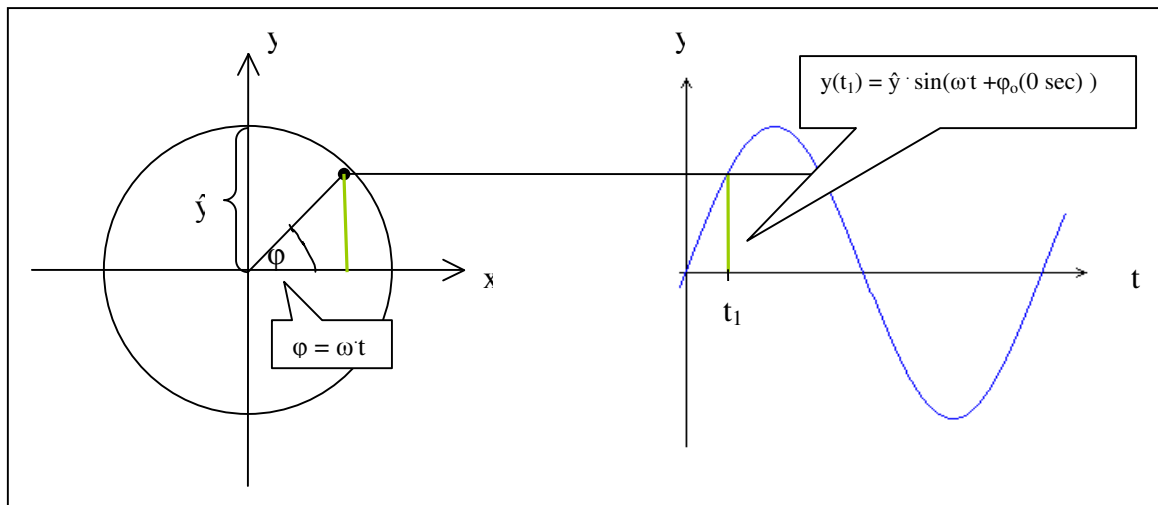


Abb.3

Jede harmonische Schwingung lässt sich durch einen Radiusvektor bzw. Zeiger der Länge \hat{y} beschreiben, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω umläuft. Diese Darstellung der Schwingung heißt Zeigerdarstellung.

Dabei wird der Winkel φ , den der Radius \hat{y} zu einem bestimmten Zeitpunkt t mit der positiven Abszisse einschließt, als Phasenwinkel oder Phase der Schwingung bezeichnet. Diese Größe kennzeichnet also den augenblicklichen Schwingungszustand.

Der Phasenwinkel φ wächst mit der Zeit t , sodass die gleichförmige Kreisbewegung folgende

Winkelgeschwindigkeit hat:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f .$$

Für die Schwingung wird ω als Kreisfrequenz bezeichnet.

Es ergibt sich folgende Funktion der Schwingung: $y(\varphi) = \hat{y} \cdot \sin(\varphi)$.

Setzt man $\varphi = \omega \cdot t$, so lautet die Zeit-Elongations-Funktion: $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$,

wobei die Phasenkonstante φ_0 die Anfangsauslenkung angibt.

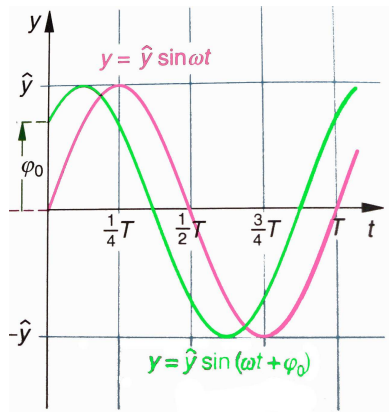


Abb.4 Zeit-Orts-Diagramm zweier harmonischer Schwingungen mit der Phasendifferenz φ_0

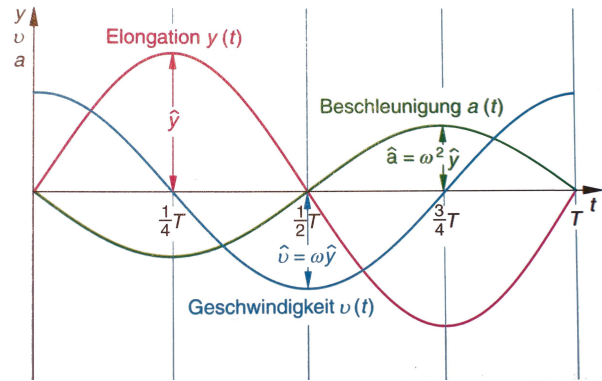


Abb.5 Darstellung der Zeit-Elongations-, Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Beschleunigungs-Funktion einer harmonischen Schwingung

Die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion erhält man, indem man $y(t)$ nach der Zeit ableitet:

$$\dot{y}(t) = v(t) = \omega \cdot \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Für die Zeit-Beschleunigungs-Funktion gilt dementsprechend:

$$\ddot{y}(t) = a(t) = -\omega^2 \cdot \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Vektoren und damit gerichtete Größen. Das Minuszeichen im obigen Term ist ein Änderungszeichen. Es berücksichtigt, dass die Beschleunigung negativ ist, wenn der Ort positiv ist und vice versa.

Anhand der obigen Beziehungen kann man einen Ausdruck für die wirkende Gesamtkraft entwickeln:

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt: *Der Betrag der Kraft F , die einem Körper der Masse m die Beschleunigung $a = \dot{v}(t)$ erteilt, ist gleich dem Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung a : $F = m \cdot a$.*

Auf die harmonische Schwingung angewandt ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Mit $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ folgt:

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot y(t) = -D \cdot y(t) \text{ mit } D = m \omega^2.$$

Der Proportionalitätsfaktor wird als Richtgröße oder Direktionsgröße D bezeichnet. Bei einem Federpendel, für das das Hookesche Gesetz gilt (siehe hierzu den Literaturverweis in Kapitel 4), stimmt sie mit der Federkonstante überein.

Die hergeleitete Gleichung sagt aus, dass die Rückstellkraft F der Elongation entgegengerichtet, also immer zur Gleichgewichtslage zeigt, und ihr Betrag proportional zum

Betrag der Elongation ist. Aus diesem Grund wird dieser Ausdruck als lineares Kraftgesetz bezeichnet.

Weiter lässt sich nun ein Ausdruck für die Periodendauer T bestimmen:

Es gilt $D = m \cdot \omega^2$ (*) und $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ (**). Setzt man (**) in (*) ein, so ergibt sich: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$.

Wie man erkennen kann, ist die Periodendauer unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

Die gedämpfte harmonische Schwingung

Eine freie Schwingung ist gedämpft, wenn sie durch Reibungsverluste Energie an die Umgebung abgibt. Das System, in dem sich der Oszillator befindet, ist also nicht isoliert. Dadurch wird die Amplitude ständig kleiner und die Schwingung kommt irgendwann zur Ruhe. Dies kommt in jeder realen physikalischen Situation vor.

Die zeitliche Abnahme der Amplitude der gedämpften Schwingung kann durch folgende Gleichung beschrieben werden: $\hat{y} = \hat{y}_0 \cdot e^{-k \cdot t}$.

Für die Elongation ergibt sich demnach:

$y = \hat{y}_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Dabei ist k die Dämpfungskonstante.

Ist die Dämpfung nicht zu groß, stimmt die Periodendauer der gedämpften Schwingung mit jener der ungedämpften überein.

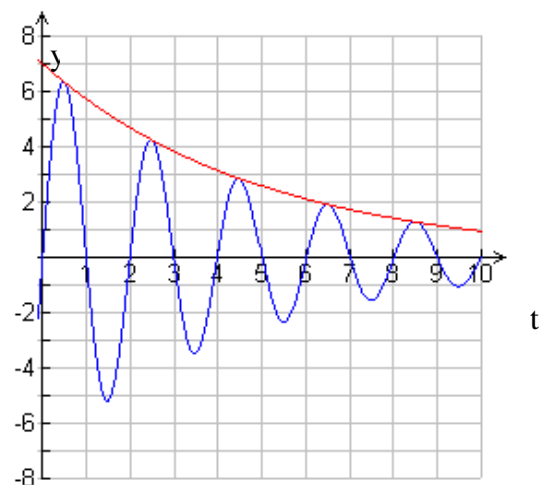


Abb. 6 $y(t) = 7 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot \sin(\pi \cdot t)$
 $\hat{y}(t) = 7 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$

Erzwungene Schwingungen

Bei jeder Schwingung tritt eine mehr oder weniger starke Dämpfung auf. Wenn die Amplitude der Schwingung konstant gehalten werden soll, muss dem System genauso viel Energie zugeführt werden, wie durch dissipative Effekte abgegeben wird. Eine solche angetriebene Schwingung wird erzwungene Schwingung genannt.

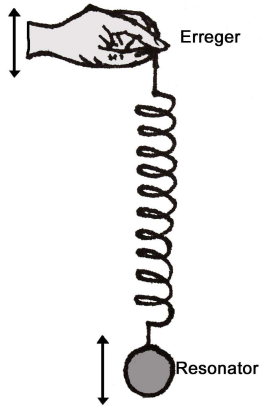


Abb. 7

Wird ein Oszillator einmal angeregt und dann sich selbst überlassen, führt er freie Schwingungen mit der Eigenfrequenz f_0 aus. Durch einen schwingenden Erreger bewegt sich das System mit der Frequenz desselben, es reagiert auf unterschiedliche Antriebsfrequenzen mit Änderungen in der Amplitude und der Phase zwischen der Auslenkung des Erregers und des Resonators. Dabei können zwei Extremfälle unterschieden werden: Bei sehr hoher Frequenz des Erregers „kommt der Oszillator nicht mehr mit“, d. h. er zittert nur noch, die Amplitude ist klein. Die Phasenverschiebung von Erreger und Resonator beträgt also eine halbe Periode. Entspricht die Erregerfrequenz der Eigenfrequenz f_0 , dann beträgt die Phasendifferenz nur noch eine viertel Periode, die Amplitude wird immer größer. Ohne Dämpfung des Systems kommt es zur Resonanzkatastrophe, bei der die mechanische Zerstörung des Systems erfolgt.

Musikinstrumente wie das Klavier und die Gitarre haben Resonanzkörper, die ein breites Spektrum an Schwingungen umfassen, damit bei allen angeschlagenen Tönen Resonanz auftritt und nicht nur bei einzelnen Frequenzen.